

## Exe 1: Integrale di Riemann

USANDO SOLO LA DEFINIZIONE CALCOLARE:

①  $\int_1^3 5 \, dx$

②  $\int_0^1 2+x \, dx$

③  $\int_0^1 x^2 \, dx$

④  $\int_0^1 e^x \, dx$

⑤  $\int_0^1 x^3 \, dx$

⑥  $\int_{-1}^1 \sin x \, dx$

DIRE SE LE SEGUENTI FUNZIONI SONO  $\mathcal{R}$ -INTEGRABILI NELL'INTERVALLO INDICATO:

⑦  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{SE } x \neq 0 \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$  SU  $I = [0, 1]$

⑧  $f(x) = x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$  SU  $I = [0, 100]$

⑨  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{SE } x \neq 0 \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$  SU  $I = [0, 1]$

⑩  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{SE } x = \frac{m}{n} \text{ CON } m, n \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ E COPRIMI} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$  SU  $I = [0, 1]$

⑪  $f(x) = \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & \text{SE } x \neq 0 \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$  SU  $I = [0, 1]$

⑫  $f(x) = \chi_A(x)$  SU  $[0, 1]$

DOVE  $\chi_A \Leftrightarrow$  LA PARTE DECIMALE DI  $x$  ESPRESSA IN DECIMALI NON CONTIENE LA CIFRA 7

QUESITI TEORICI VARI:

(13) SIA  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  LIMITATA E TALE CHE:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0, g, h \in \mathcal{R}([a, b])$  TALI CHE

$$\forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{E} \quad \left| \int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

MOSTRARE CHE  $f \in \mathcal{R}([a, b])$

(14) DATA  $f \in C([a, b])$  DEFINIAMO LA SUCCESSIONE  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$

COME

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right)\right).$$

MOSTRARE CHE  $\sigma_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ .

MOSTRARE POI CHE SE  $f \in C^2([a, b])$  ALLORA

$$\sigma_n - \int_a^b f(x) dx = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

---

IN AULA SONO STATI SVOLTI I NUMERI (7), (8), (9) E (10).